أجوبة امتحان الدورة العادية 2003

التمرين الأول :

1

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \int_1^2 \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx$$

$$= [uv]_1^2 - \int_1^2 uv'\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 1\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - [x]_1^2$$

$$= 2\ln 2 - 1\underbrace{\ln 1}_{0} - (2-1)$$

$$= \boxed{2\ln 2 - 1}$$

2

نضع : $t = \sqrt{e^x}$ يعني : $t = e^{\frac{x}{2}}$

و منه : $x = 2\ln t$ إذن : $dx = \left(\frac{2}{t}\right)dt$

إذا كان : $x = 0$ فإن : $t = 0$

إذا كان : $x = \ln 4$ فإن : $x = 2$

و لدينا كذلك : $x\sqrt{e^x} = 2t\ln t$

و بالتالي :

$$J = \int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\,dx = \int_1^2 2t\ln t\cdot\left(\frac{2}{t}\right)dt$$

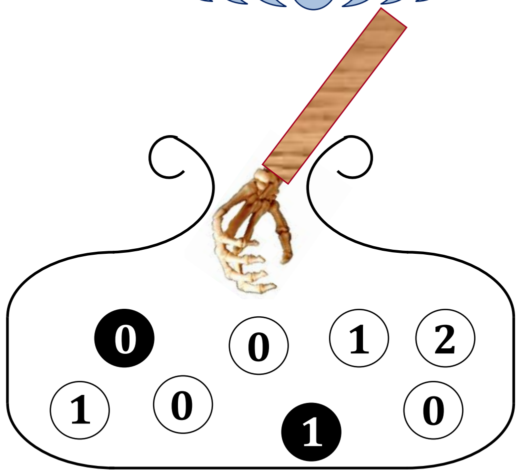
$$= \int_1^2 4\ln t\,dt$$

$$= 4\int_1^2 \ln t\,dt$$

$$= \boxed{4(2\ln 2 - 1)}$$

التمرين الثاني :

1



سوف نستعمل في هذا التمرين تعريف الاحتمال و كذلك تقنية الاحتمال المضاد و أقصد المتساويتين التاليتين :

$$\boxed{\begin{cases} p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} \\ p(B) + p(\bar{B}) = 1 \end{cases}}$$

لدينا في هذا التمرين الحدثين A و B معرفين كما يلي :

A : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "
B : " جداء العددين المسجلين على الكرتين منعدم "

عندما نسحب من الكيس كرتين في آن واحد فإن كون امكانيات هذه التجربة العشوائية معرف بـ $card(\Omega) = C_8^2 = 28$.

و لدينا كذلك C_6^2 امكانية للحصول على كرتين بيضاوين.

و لدينا كذلك C_2^2 امكانية للحصول على كرتين سوداوين.

إذن احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p(A) = p(\text{الكرتان من نفس اللون})$$

$$= p(\text{بيضاوين} \quad \text{أو} \quad \text{سوداوين})$$

$$= p(\text{بيضاوين}) + p(\text{سوداوين})$$

$$= \frac{card(\text{بيضاوين})}{card(\Omega)} + \frac{card(\text{سوداوين})}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_6^2}{28} + \frac{C_2^2}{28} = \frac{15}{28} + \frac{1}{28} = \frac{16}{28} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

لحساب احتمال الحدث B نستعمل تقنية الحدث المضاد : $p(B) = 1 - p(\bar{B})$

$$p(\text{الجداء منعدم}) = 1 - p(\text{الجداء غير منعدم})$$

$$= 1 - p(\text{الكرتان تخالفان الصفر معا})$$

$$= 1 - \frac{card(\text{الكرتان تخالفان الصفر معا})}{card(\Omega)}$$

$$= 1 - \frac{C_4^2}{28} = 1 - \frac{6}{28} = \frac{22}{28} = \boxed{\frac{11}{14}}$$

2

نقصد بقانون احتمال متغير عشوائي احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي. في هذا السؤال لا تهمنا ألوان الكرات بل الأعداد التي تحملها.

عندما نسحب كرتين من الكيس فإن الإمكانيات الخمس التي يمكن الحصول عليها هي كالتالي : 00 أو 01 أو 02 أو 11 أو 21 .

بما أن المتغير العشوائي X يربط كل سحبة بمجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان فإن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3 . أي بتعبير آخر : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$

لنحسب الآن احتمال كل قيمة من هذه القيم :

$$p[X=0] = p(\text{الكرتان تحملان معا الصفر}) = \frac{card(\text{الكرتان تحملان معا الصفر})}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2}{28} = \frac{6}{28} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

$$p[X=1] = p(\text{إحداهما تحمل 0 و الاخرى 1}) = \frac{card(\text{إحداهما تحمل 0 و الاخرى 1})}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{28} = \frac{4\times 3}{28} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

$$p[X=2] = p(1+1 \text{ أو } 2+0) = p(1+1) + p(2+0) = p(\text{الكرتان تحملان معا 1}) + p(\text{احداهما 0 و الاخرى 2})$$
$$= \frac{card(\text{الكرتان تحملان معا 1})}{card(\Omega)} + \frac{card(\text{احداهما 0 و الاخرى 2})}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2}{28} + \frac{C_4^1 \times C_1^1}{28} = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} = \frac{7}{28} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$p[X=3] = p(\text{احداهما 1 و الاخرى 2}) = \frac{card(\text{احداهما تحمل 1 و الاخرى 2})}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{28} = \boxed{\frac{3}{28}}$$

إذن قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X : \{0;1;2;3\} \to [0;1]$$

$$P_X(0) = \frac{3}{14}$$
$$P_X(1) = \frac{3}{7}$$
$$P_X(2) = \frac{1}{4}$$
$$P_X(3) = \frac{3}{28}$$

للتأكد من صحة الإجابة يجب أن تحصل على ما يلي :

$$\boxed{P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) = 1}$$

التمرين الثالث :

1

ليكن z' و z'' حلا المعادلة (E) التالية : $(E) : mz^2 - 2z + \bar{z} = 0$

لدينا :
$$\Delta = (-2)^2 - 4m\bar{m} = 4 - 4m\bar{m} = 4(1 - m\bar{m}) = 4(1-|m|^2) = 4\left(1 - \sqrt{2}^2\right) = 4(1-2) = -4 = (2i)^2$$

إذن : $\boxed{z'' = \frac{2-2i}{2m} = \frac{1-i}{m}}$ و $\boxed{z' = \frac{2+2i}{2m} = \frac{1+i}{m}}$

2

في البداية لدينا : $m = \sqrt{2}e^{i\alpha}$.

و لدينا كذلك :
$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

و
$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}$$

و كذلك :
$$z' = \frac{1+i}{m} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$$

إذن :
$$z'' = \frac{1-i}{m} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

و بالتالي :
$$\frac{z'}{z''} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}{e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

3

نرمز بـ z_A و z_B و z_C لألحاق النقط A و B و C

لدينا باستعمال تعريف معيار عدد عقدي :

$$OA = |z_A - z_O| = |z'| = \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\right| = 1$$
$$AC = |z_C - z_A| = |z''| = \left|e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\right| = 1$$
$$CB = |z_B - z_C| = |-z'| = \left|-e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\right| = 1$$
$$OB = |z_B - z_O| = |z''| = \left|e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\right| = 1$$

نستنتج إذن أن الرباعي $OABC$ معين لأن جميع أضلاعه متقايسة.
و لكي يصبح مربعا يكفي أن نبين أن إحدى زواياه قائمة .

لدينا : $\frac{(z' + z'') - z''}{(z' + z'') - z'} = \frac{z'}{z''} = e^{\frac{i\pi}{2}}$

إذن : $\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = e^{\frac{i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]}$

و هذا يعني بكل بساطة أن الزاوية $\hat{C}$ زاوية قائمة
و بالتالي $OACB$ مربع لأنه معين إحدى زواياه قائمة .

التمرين الرابع:

1

لدينا : $(\mathcal{P}) : x + y - z - 3 = 0$

إذن $\vec{n}(1;1;-1)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم $(\mathcal{D})$.

بما أن المستقيم $(\mathcal{D})$ مار من النقطة A و عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.
فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستقيميتان .
إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{n}$.

يعني : $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ يعني : $\begin{cases} x - 2 = t \\ y = t \\ z - 2 = -t \end{cases}$

يعني : $\boxed{\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}}$

و هذه الكتابة الاخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم $(\mathcal{D})$.

2

لتكن $B(x_B;x_B;x_B)$ نقطة تقاطع المستوى $(\mathcal{P})$ و المستقيم $(\mathcal{D})$

إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\boxed{\begin{cases} x_B = t + 2 \\ y_B = t + 2 \\ z_B = t + 2 \\ x_B + y_B - z_B - 3 = 0 \end{cases}}$

نعوض x_B و y_B و z_B في آخر معادلة من النظمة و ذلك للحصول على معادلة تضم فقط البارامتر t .

لدينا : $x_B + y_B - z_B - 3 = 0$

إذن : $(t + 2) + t - (-t + 2) - 3 = 0$

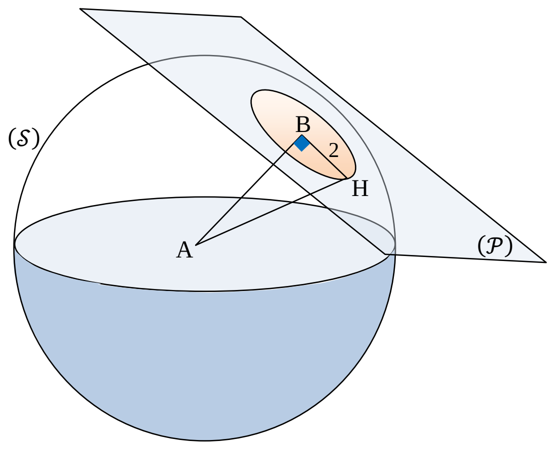
يعني : $3t = 3$ أي : $t = 1$

نرجع بعد ذلك و نعوض $t = 1$ في تعابير x_B و y_B و z_B فنحصل على :

$$\boxed{\begin{cases} x_B = 1 + 2 = 3 \\ y_B = 1 \\ z_B = -1 + 2 = 1 \end{cases}}$$

و بالتالي : $B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هي نقطة تقاطع المستوى $(\mathcal{P})$ و المستقيم $(\mathcal{D})$.

3 أ



لتكن H نقطة من الدائرة التي مركزها B و شعاعها 2 .
شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ هو المسافة AH
لدينا حسب نتيجة السؤال 1 : $(\mathcal{D})$ مستقيم مار من A و عمودي على $(\mathcal{P})$.
إذن المثلث BAH قائم الزاوية في النقطة B .

و المسافة AB هي :
$$AB = d(A;(\mathcal{P})) = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 0 - 1 \times 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

إذن بإمكانك استعمال مبرهنة فيتاغورس في المثلث BAH القائم الزاوية في B
$$AH^2 = HB^2 + AB^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$
إذن : $\boxed{AH = \sqrt{7}}$

3 ب

الفلكة $(\mathcal{S})$ مركزها $A(2;0;2)$ و شعاعها $\sqrt{7}$
إذن معادلتها الديكارتية تكتب على الشكل التالي :
$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = (\sqrt{7})^2$$
$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 4 = 7$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$$
و هذه الكتابة الاخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الخامس:

1 أ

في البداية لدينا : $f(0) = 4 \times 0 \times \sqrt{0} - 3 \times 0^2 = 0$

و لدينا كذلك : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 4x\sqrt{x} - 3x^2 = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على اليمين في الصفر .

و لدينا كذلك : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1 - x^3) = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على اليسار في الصفر .

و بالتالي f دالة متصلة في الصفر لأنها متصلة على اليمين و اليسار .

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)}$$

1 ب

لكي نبرهن على أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة O يكفي أن نبرهن على أنها تمتلك نفس العدد المشتق على يمين و على يسار الصفر .

لندرس أولا الاشتقاق على يمين الصفر $(x>0)$.

لدينا $(x>0)$ إذن $f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2$.

و منه نحسب النهاية على اليمين كما يلي :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(4\sqrt{x}-3x\right)$$
$$=4\sqrt{0}-3\times0$$
$$=0=f'_d(0) \quad (1)$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و حصلنا على : $\boxed{f'_d(0)=0}$.

لندرس ثانيا الاشتقاق على يسار الصفر $(x<0)$.

لدينا $(x<0)$ إذن $f(x)=\ln(1-x^3)$.

و منه نحسب النهاية على اليسار كما يلي :

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}$$

نحسب النهاية التالية $\boxed{\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}}$ باستعمال تقنية تغيير المتغير

نضع $t=(-x)^3$ إذن $x=-t^{\frac{1}{3}}$

إذا كان $(x<0)$ فإن $(-x>0)$ يعني أن $(-x)^3>0$.

إذن : $(t>0)$

و هذا يعني أنه إذا كان المتغير x يؤول إلى الصفر من جهة اليسار فإن المتغير t يؤول إلى الصفر من جهة اليمين .

إذن النهاية تصبح :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+(-x)^3)}{x}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{-t^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{-t^{\frac{-2}{3}}\times t}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(-t^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(-e^{\frac{2}{3}\ln t}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$
$$=\left(-e^{\frac{2}{3}\ln(0^+)}\right)(1)=\left(-e^{\frac{2}{3}(-\infty)}\right)$$
$$=\left(-e^{-\infty}\right)=0=\boxed{f'_g(0)}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في الصفر و حصلنا على : $\boxed{f'_g(0)=0}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $f'_d(0)=f'_g(0)$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة O و العدد المشتق هو : $f'(0)=0$

و لتفسير هذه النتيجة هندسيا نقول بأن محور الأفاصيل مماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 0 لأن $f(0)=0$ و $f'(0)=0$.

2

ندرس اشتقاق الدالة f وفق حالتين :

الحالة الاولى : إذا كان $(x<0)$ إذن : $f(x)=\ln(1-x^3)$

في البداية وجب التذكير بما يلي : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و كانت f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال J . إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت جل صور عناصر المجال I بالدالة g تقبل صورا بالدالة f . أو بتعبير أسهل ، إذا كان : $g(I)\subseteq J$.

لدينا الدالة $g:x\to(1-x^3)$ معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ لانها حدودية .

و لدينا أيضا $h:x\to\ln x$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لنبرهن على أن صورة المجال $]-\infty;0[$ بالدالة g توجد ضمن $]0;+\infty[$.

يعني نريد أن نبرهن على أن : $g(]-\infty;0[)\subseteq]0;+\infty[$.

من أجل ذلك نختار عنصرا x من المجال $]-\infty;0[$ و نبين أن صورته بالدالة g تنتمي إلى المجال $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty;0[$.

إذن : $x<0$ و منه : $x^3<0$.

أي : $-x^3>0$ يعني : $1-x^3>1$ أي : $g(x)>1>0$.

و منه : $g(x)>0$ إذن : $g(x)\,\epsilon\,]0;+\infty[$.

و بالتالي : $g(]-\infty;0[)\subseteq]0;+\infty[$.

نستطيع الآن أن نقول أن $x\to\ln(1-x^3)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$.

و إذا افترضنا أنك لم تكتب هذا أثناء الامتحان فلا أعتقد أن ذلك سيؤثر على نقطة هذا السؤال . و الشيء المهم و المؤكد هو ايجاد الدالة المشتقة :

لدينا : $f(x)=h\circ g(x)$ بحيث : $\left.\begin{matrix}h(x)=\ln x\\ g(x)=1-x^3\end{matrix}\right\}$.

إذن حسب مبرهنة مشتقة مُرَكَّب دالتين نحصل على ما يلي :

$$f'(x)=g'(x)\cdot h'(g(x))=(-3x^2)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{-3x^2}{1-x^3}$$

و بما أن $x<0$ فإن $1-x^3>0$ و $-3x^2<0$.

إذن $\frac{-3x^2}{1-x^3}<0$ أي : $f'(x)<0$

و من هذا نستنتج أن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]-\infty;0[$.

الحالة الثانية : إذا كان $x\geq0$ إذن : $f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2$

و منه نستنتج أن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ لانها تشكيلة منسجمة من دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$.

$$f'(x)=\left(4x\cdot x^{\frac{1}{2}}-3x^2\right)'=\left(4x^{\frac{3}{2}}-3x^2\right)'$$
$$=4\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)-3(2x)$$
$$=6x^{\frac{1}{2}}-6x$$
$$=6x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\boxed{6\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

و يبين الجدول التالي جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(1-\sqrt{x})$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3 أ

عندما يؤول x إلى $-\infty$ يكون تعبير الدالة f هو $f(x)=\ln(1-x^3)$

إذن نحسب نهاية الدالة f عند كما يلي :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\ln(1-x^3) &= \ln(1-(-\infty)^3)\\ &= \ln(1-(-\infty))\\ &= \ln(1+\infty)\\ &= \boxed{(+\infty)}\end{aligned}$$

و عندما يؤول x إلى $+\infty$.

يكون تعبير الدالة f هو : $f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2$.

إذن نحسب نهاية الدالة f عند كما يلي :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(4x\sqrt{x}-3x^2\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(4x\cdot x^{\frac{1}{2}}-3x^2\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(4x^{\frac{3}{2}}-3x^2\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(4x^{\frac{-1}{2}}-3\right)\\ &= (+\infty)(4\times0-3)\\ &= (+\infty)(-3)\\ &= \boxed{(-\infty)}\end{aligned}$$

3 ب

ليكن x عددا حقيقيا سالبا قطعا إذن :

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1-x^3) = \ln[1+(-x)^3]\\ &= \ln\left[(-x)^3\left(1+\frac{1}{(-x)^3}\right)\right]\\ &= \ln[(-x)^3]+\ln\left[\left(1+\frac{1}{(-x)^3}\right)\right]\\ &= 3\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\\ &= \boxed{3\ln(-x)+\ln(1-x^{-3})}\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\frac{f(x)}{x}=3\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}}$

3 ج

في البداية نُذَكِّرُ بالنهايتين الهامتين التاليتين :

$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)=0}$ و $\boxed{\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=1}$

لدينا حسب نتيجة السؤال ب : $\frac{f(x)}{x}=3\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$

لنحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=-\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=-x}}\frac{\ln t}{t}=0$$

لنحسب النهاية: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+(-x)^{-3})}{x}$

نضع : $t=(-x)^{-3}$ إذن $x=-t^{\frac{-1}{3}}$

نلاحظ أنه إذا كان $x\to-\infty$ فإن $t\to0^+$.

إذن النهاية تصبح :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+(-x)^{-3})}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+t)}{-t^{\frac{-1}{3}}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{-t\cdot t^{\frac{-4}{3}}}\\ &= \lim_{t\to0^+}\left(-t^{\frac{4}{3}}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)\\ &= \lim_{t\to0^+}\left(-e^{\frac{4}{3}\ln t}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)\\ &= \lim_{t\to0^+}\left(-e^{\frac{4}{3}\ln t}\right)\underbrace{\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)}_{\xrightarrow{0^+}\ \boxed{1}}\\ &= \left(-e^{\frac{4}{3}\ln(0^+)}\right)\times(1)\\ &= \left(-e^{\frac{4}{3}(-\infty)}\right)\times(1)\\ &= \left(-e^{(-\infty)}\right)\times(1)\\ &= (-0)\times(1)=\boxed{0}\end{aligned}$$

حصلنا إذن على ما يلي : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$

و لدينا حسب ما سبق : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

إذن من هاتين النهايتين نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الافاصيل .

من جهة ثانية لدينا : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$

نظيف النهاية التالية :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{x}-3x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-3\right)=(+\infty)\left(\frac{4}{\sqrt{+\infty}}-3\right) = (+\infty)(0-3)\\ &= (+\infty)(-3)\\ &= \boxed{(-\infty)}\end{aligned}$$

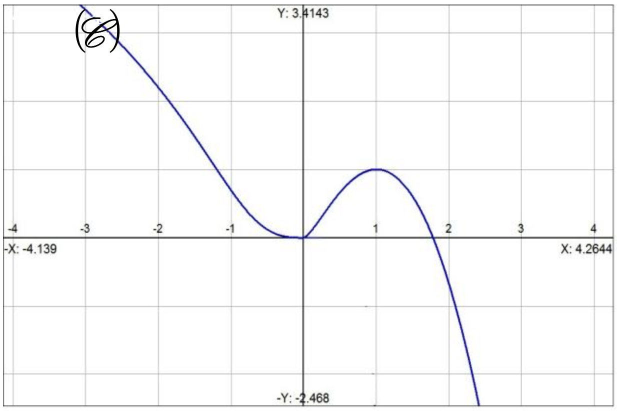
حصلنا إذن على النهايتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{و} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = -\infty}$$

و هذا يعني أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الاراتيب .

4

التمثيل المبياني للدالة f .



5 أ

لدينا الدالة h هي قصور الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

يعني : $\forall x \in]-\infty;0[\ ;\ h(x) = \ln(1-x^2)$

و لدينا حسب نتيجة السؤال 2 : f متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;0[$.

إذن h دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;0[$.

يعني أن h تقابل من المجال $]-\infty;0[$ نحو صورته $J = h(]-\infty;0[)$

و لدينا : $J = h(]-\infty;0[) = \left]h(0)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[=]0;+\infty[$

5 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

نضع $y = h^{-1}(x)$ إذن $x = h(y)$ يعني $x = \ln(1-y^3)$.

يعني $e^x = 1-y^3$ يعني $1-e^x = y^3$ يعني $(1-e^x)^{\frac{1}{3}} = y$

و بالتالي الدالة العكسية h^{-1} معرفة بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1}:\ ]0;+\infty[\ \to\ ]-\infty;0[\\ \qquad\quad x \ \to\ (1-e^x)^{\frac{1}{3}} \end{array}}$$

6 أ

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{4}{9} \le u_n \le 1$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{4}{9}$.

إذن $\frac{4}{9} \le \frac{4}{9} \le 1$ يعني $\frac{4}{9} \le u_0 \le 1$.

نفترض الآن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{4}{9} \le u_n \le 1$

و ننطلق من التأطير التالي : $\frac{4}{9} \le u_n \le 1$

بما أن f متصلة و تزايدية على $[0;1]$ فإن : $f\left(\frac{4}{9}\right) \le f(u_n) \le f(1)$.

يعني : $\frac{16}{27} \le 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 \le 1$ أي : $\frac{16}{27} \le u_{n+1} \le 1$.

و بما أن : $\frac{4}{9} < \frac{16}{27}$ فإن : $\frac{4}{9} \le u_{n+1} \le 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{4}{9} \le u_n \le 1}$.

6 ب

لنبرهن على أن : $f(x) \ge x$; $\forall x \in \left[\frac{4}{9};1\right]$.

ليكن x عنصرا من المجال $\left[\frac{4}{9};1\right]$.

لدينا : $f(x) - x = 4x\sqrt{x} - 3x^2 - x = x(-3x + 4\sqrt{x} - 1)$

نضع $x = y^2$ إذن $-3x + 4\sqrt{x} - 1 = -3y^2 + 4y - 1$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود $-3y^2 + 4y - 1$ إذن : $\Delta = 16 - 12 = 4$.

نحصل إذن على جذرين y_1 و y_2 للحدودية المذكورة معرفين بما يلي :

$$\boxed{y_1 = \frac{-4-2}{-6} = 1} \quad \text{و} \quad \boxed{y_2 = \frac{-4+2}{-6} = \frac{1}{3}}$$

إذن نحصل على : $-3y^2 + 4y - 1 = -3(y-1)\left(y - \frac{1}{3}\right)$

بالعودة إلى التعبير الأول نحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned} x(-3x+4\sqrt{x}-1) &= y^2(-3y^2+4y-1) \\ &= -3y^2(y-1)\left(y-\frac{1}{3}\right) \\ &= -3x(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{f(x) - x = -3x(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right)}\ (**)$

لدينا $\frac{4}{9} \le x \le 1$ إذن $\boxed{(-3x)\ \text{عدد سالب}}\ (1)$

و لدينا كذلك $\frac{2}{3} \le \sqrt{x} \le 1$ و منه $\frac{-1}{3} \le \sqrt{x} - 1 \le 0$

إذن : $\boxed{\sqrt{x} - 1\ \text{عدد سالب}}\ (2)$

و لدينا كذلك $\frac{1}{3} \le \sqrt{x} - \frac{1}{3} \le \frac{2}{3}$ و منه $\boxed{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right)\ \text{عدد موجب}}\ (3)$

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\boxed{-3x(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right)\ \text{عدد موجب}}$$

إذن باستعمال النتيجة $(**)$ نحصل على ما يلي :

$\forall x \in \left[\frac{4}{9};1\right]\ ;\ f(x) - x \ge 0$

و بالتالي : $\boxed{\forall x \in \left[\frac{4}{9};1\right]\ ;\ f(x) \ge x}\ (■)$

لدينا حسب نتيجة السؤال 1- أ - : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{4}{9} \le u_n \le 1$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n \in \left[\frac{4}{9};1\right]$

و منه حسب النتيجة (■) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ f(u_n) \ge u_n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 \ge u_n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \ge u_n$

و بالتالي : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{متتالية تزايدية}}$.

6 ج

بما أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد 1 (يعني $u_n \le 1$)
فإن هذه المتتالية متقاربة .

و بما أن الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{9};1\right]$

فإن نهاية المتتالية ℓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق : $f(\ell) = \ell$ و $\frac{4}{9} \le \ell \le 1$

يعني : $f(\ell) - \ell = 0$ و $\frac{4}{9} \le \ell \le 1$.

و لدينا حسب النتيجة $(**)$: $f(\ell) - \ell = -3\ell(\sqrt{\ell}-1)\left(\sqrt{\ell}-\frac{1}{3}\right)$

إذن المعادلة $f(\ell) - \ell = 0$ تصبح $-3\ell(\sqrt{\ell}-1)\left(\sqrt{\ell}-\frac{1}{3}\right) = 0$

يعني : $\ell = \frac{1}{9}$ أو $\ell = 1$ أو $\ell = 0$.

و نعلم أن : $\frac{4}{9} \le \ell \le 1$ إذن نستنتج أن $\boxed{\ell = 1}$.